IUJO Instituto Universitario Jesús Obrero

Extensión Barquisimeto

N° 01 Guía Didáctica: LIMITES

La guía tiene como propósito guiar al estudiante en el estudio de las límites y sus propiedades

Competencia

Aplica el concepto de límitess

Contenidos

Límite

Fórmulas trigonometricas

Evaluación

Formativa y sumativa

Docent : Luis Infante		Asignatura:	Matemática II
luisinfante@iujo.edu.ve	Lapso Académico:		1-2020
Carrera: INFORMÁTICA	Semestre: Segundo Grupo 1		
Fecha de elaboración: mayo 2020			

Contenido

Introducción

Los tres temas más importantes en este estudio son los conceptos de **límite**, **derivad**a e **integral**. Cada uno de estos conceptos está relacionado con las funciones.

Históricamente, para introducir los enunciados fundamentales del cálculo, se han usado dos problemas: el problema de la recta tangente y el problema del área.

Las dos grandes áreas del cálculo, denominadas cálculo diferencial y cálculo integral, se basan en el concepto fundamental de límite.

Una de las funciones **matemáticas** más importantes es la del límite matemático. En términos generales, la palabra límite hace referencia a algo que no puede exceder ciertas demarcaciones o áreas. Según la Real Academia de la Lengua Española, la palabra **límite en matemáticas** se define como "En una secuencia infinita de magnitudes, magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de la secuencia." (Diccionario RAE).

El límite en matemáticas es "una magnitud fija a la que una magnitud variable puede aproximarse, tanto como se quiera sin necesariamente alcanzarla". Confuso, ¿verdad? Pero en realidad es simple.

Los límites son expresiones abstractas, nunca se pueden tocar ni visualizar, simplemente se las entiende en su comportamiento. Descubre el alcance de las cosas, los recursos que necesitas y la capacidad a desarrollar para que dicha situación sea favorable, un simple pensamiento positivo puede hacer la diferencia. Desarrollar una nueva habilidad, tomar un curso, cultivar el hábito de la lectura, hacer ejercicios todos los días. Todo cuenta.

En realidad los límites están en la mente de las personas, un gran postulado en matemáticas dice: "la esperanza matemática nunca es cero, todo es posible que suceda". Esto se aplica hasta en la lotería, donde las probabilidades, aunque sean bajas, existen; siempre hay una esperanza.

Los límites permiten conocer el comportamiento de una determinada función. En la Antigua Grecia, los límites eran empleados para calcular áreas, como el área del círculo. En toda ingeniería, deben conocerse los límites para saber las aproximaciones posibles con un margen mínimo de error.

Es evidente que los límites son usados de manera implícita en varias actividades cotidianas y aunque no somos conscientes de su uso en algunas ocasiones, tienen una utilidad impresionante en nuestra sociedad.

No dejes que los límites marquen tu vida, si quieres que algo cambie, entonces cambia para que el resto de cosas cambien a tu alrededor; siempre hay algo que cambiar o mejorar en nuestras vidas. Siempre. "Todo lo que se aprende en la vida sirve para mejorar" (María Josefa Palomeque Delgado)

El estudio de las matemáticas, como el Nilo,
se inicia en minuciosidad, pero termina en magnificencia.
Charles Caleb Colton

Limites

"Una de sus paradojas constituye el testimonio más antiguo que se conserva del pensamiento infinitesimal" Zenón de Elea

Grecia durante siglos fue cuna de grandes genios que marcaron significativamente el modo de ver el Universo. Algunos de estos eran Matemáticos que transformaron técnicas de medición y de conteo en una verdadera Ciencia. En esta oportunidad transportar a la actualidad uno de estos genios: **Zenón de Elea.**

Zenón de Elea (490 - 430 A.C.), amigo del filósofo Parménides. La principal fuente del conocimiento que se posee sobre Zenón de Elea llega es gracias al diálogo Parménides escrito por Platón, cuando visitó Atenas con su protector dejó sorprendidos a los filósofos inventando **cuatro inocentes paradojas** que no podían resolver con palabras, pero si inquieto a matemáticos posteriores que querían dar respuesta a dichas paradojas.

De estos conflictos mentales constituyen el testimonio más antiguo que se conserva del **pensamiento infinitesimal** desarrollado muchos siglos después en la aplicación del **cálculo infinitesimal que nacerá de la mano de Leibniz y Newton en 1666**. No obstante, Zenón era ajeno a toda posible matematización, presentando una conceptualización de tal estilo como un instrumento necesario para poder formular sus paradojas.

Su paradoja más conocida es la de Aquiles y la tortuga y dice así: Aquiles, el atleta más veloz, capaz de correr los 100 m. en 10 segundos, no podrá alcanzar a una lenta tortuga, diez veces menos rápida que él. Ambos disputan una carrera, concediendo Aquiles una ventaja de 100 m. a la tortuga. Cuando Aquiles ha cubierto esos 100 m., la tortuga se ha desplazado 10 m. Al cubrir Aquiles esos 10 m., la tortuga se ha desplazado 1 m. Mientras cubre ese metro que le separa de la tortuga, ésta ha recorrido 0,1 m. Y así indefinidamente.

Es evidente que esta paradoja, bajo una apariencia de razonamiento correcto, esconde algún fallo... Aquiles puede alcanzar a la tortuga. Pero se tardó 24 siglos en desvelar por completo, gracias a la Teoría de Límites, cuál era el fallo: la suposición de que infinitos trayectos deben sumar una distancia infinita y necesitan un tiempo infinito no es correcta. Una suma de infinitos términos puede dar un resultado finito.

Por otra parte, El método de razonamiento de Zenón consistía en operar por reducción al absurdo que es un método de deducción indirecta. Actualmente su aporte al conocimiento universal sigue siendo utilizado, el método de reducción al absurdo es utilizado para demostraciones simbólicas u orales, en ciencias tanto estrictas como sociales.

El cálculo infinitesimal o cálculo de infinitesimales constituye una parte muy importante de las matemáticas que estudia conceptos como las funciones, los límites, las derivadas, las integrales, las series infinitas. Es muy habitual en el contexto académico, por comodidad, simplemente llamarlo cálculo.

Definición

Si los valores funcionales $f(x)$ de una función f se trazan muy cerca de un número$\mathcal{L}$, para todos los valores de x, cuando x se aproxima pero no es igual ha a, $\mathcal{L}$ se define como el límite de $f(x)$ cuando x se acerca ha a y se expresa:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \mathcal{L}$$

Suponiendo que:

$$\lim_{x \to a} f(x) \;\; y \;\; \mathit{lim}_{x \to a} g(x)$$

existan y sus propiedades son:

1. $\lim_{x \to a} k = k \; (k = ctte)$
2. $\lim_{x \to a} x^n = a^n \; (n \in \mathbb{Z}^+)$
3. $\lim_{x \to a} [k\, f(x)] = k \; \mathit{lim}_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \mathit{lim}_{x \to a} f(x) \pm \mathit{lim}_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \left[\mathit{lim}_{x \to a} f(x)\right]\left[\mathit{lim}_{x \to a} g(x)\right]$
6. $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\mathit{lim}_{x \to a} f(x)}{\mathit{lim}_{x \to a} g(x)} \; ; \; \mathit{lim}_{x \to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n \; ; n > 0$

Nota 1:

- Si $f(x)$ es un polinomio, entonces, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios, entonces,

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f(a)}{g(a)} \; ; \; \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Ejercicios resueltos.

1. $\lim_{x \to 3} (x^2 - 7x + 9) = 3^2 - 7 * 3 + 9 = 9 - 21 + 9 = 18 - 21 = -3$
2. $\lim_{x \to -2} (x^2 - x - 6) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 6 - 6 = 0$
3. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}\right) = \frac{1^2+1-2}{1^2+3*1+2} = \frac{1+1-2}{1+3+2} = \frac{2-2}{6} = \frac{0}{6} = 0$
4. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}\right) = \frac{2^2+2-6}{2^2-3*2+2} = \frac{4+2-6}{4-6+2} = \frac{6-6}{6-6} = \frac{0}{0}$

   Factorizando los polinomios:

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \\ x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) \end{cases}$$

   Así:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}\right) = \lim_{x \to 2} \left[\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x-1)}\right] = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \frac{2+3}{2-1}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}\right) = \frac{5}{1} = 5$$

5. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4-7x^3+5x^2+7x-6}{x^4-2x^3-x^2+4x-2}\right) = \frac{1^4-7*1^3+5*1^2+7*1-6}{1^4-2*1^3-1^2+4*1-2} = \frac{1-7+5+7-6}{1-2-1+4-2} = \frac{13-13}{5-5}$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4-7x^3+5x^2+7x-6}{x^4-2x^3-x^2+4x-2}\right) = \frac{0}{0}$$

Factorizando los polinomios:

$$\begin{cases} x^4-7x^3+5x^2+7x-6 = (x-1)^2(x^2-5x+2) \\ x^4-2x^3-x^2+4x-2 = (x-1)^2(x^2-2) \end{cases}$$

Así:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4-7x^3+5x^2+7x-6}{x^4-2x^3-x^2+4x-2}\right) = \lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)^2(x^2-5x+2)}{(x-1)^2(x^2-2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-5x+2}{x^2-2}\right] = \frac{1^2-5*1+2}{1^2-2} = \frac{1-5+2}{1-2} = \frac{3-5}{-1} = \frac{-2}{-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4-7x^3+5x^2+7x-6}{x^4-2x^3-x^2+4x-2}\right) = 2$$

Nota 2

$$1.\,(x-a)(x+a) = x^2-a^2$$
$$2.\,(x-a)(x^2+ax+a^2) = x^3-a^3$$
$$3.\,(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3) = x^4-a^4$$
$$4.\,(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4) = x^4-a^4$$

En general:

$$(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}) = x^n-a^n\ ;\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$$

Nota 3

$$1.\,(x+a)(x-a) = x^2-a^2$$
$$2.\,(x+a)(x^2-ax+a^2) = x^3+a^3$$
$$3.\,(x+a)(x^3-ax^2+a^2x-a^3) = x^4-a^4$$
$$4.\,(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4) = x^5+a^5$$
$$5.\,(x+a)(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5) = x^6-a^6$$
$$6.\,(x+a)(x^6-ax^5+a^2x^4-a^3x^3+a^4x^2-a^5x+a^6) = a^7+a^7$$

En general:

$$(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1}) = x^n-a^n\ ;\ \forall n\in\mathbb{P}^+$$
$$(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1}) = x^n+a^n\ ;\ \forall n\in\mathbb{I}^+$$

6. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5x^2-1}-2}{x-1}\right) = \frac{\sqrt{5(1^2)-1}-2}{1-1} = \frac{\sqrt{5-1}-2}{0} = \frac{\sqrt{4}-2}{0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5x^2-1}-2}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5x^2-1}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{5x^2-1}+2}{\sqrt{5x^2-1}+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\left(\sqrt{5x^2-1}\right)^2-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{5x^2-1}+2\right)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{5x^2-1-4}{(x-1)\left(\sqrt{5x^2-1}+2\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{5x^2-5}{(x-1)\left(\sqrt{5x^2-1}+2\right)}\right] = \mathit{lim}_{x\to 1}\left[\frac{5(x^2-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x^2-1}+2\right)}\right]$$

$$= \mathit{lim}_{x\to 1}\left[\frac{5(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x^2-1}+2\right)}\right] = \mathit{lim}_{x\to 1}\left[\frac{5(x+1)}{\sqrt{5x^2-1}+2}\right]$$

Evaluando el límite:

$$\mathit{lim}_{x\to 1}\left[\frac{5(x+1)}{\sqrt{5x^2-1}+2}\right] = \frac{5(1+1)}{\sqrt{5*1^2-1}+2} = \frac{5*2}{\sqrt{4}+2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

7. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt[3]{7x-1}+2}{x+1}\right) = \frac{\sqrt[3]{7(-1)-1}-2}{(-1)+1} = \frac{\sqrt[3]{-7-1}-2}{-1+1} = \frac{\sqrt[3]{-8}+2}{0} = \frac{-2+2}{0} = \frac{0}{0}$

Luego:

$$\mathit{lim}_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt[3]{7x-1}+2}{x+1}\right) = \lim_{x\to -1}\left[\left(\frac{\sqrt[3]{7x-1}+2}{x+1}\right)\left(\frac{\left(\sqrt[3]{7x-1}\right)^2-2\sqrt[3]{7x-1}+2^2}{\left(\sqrt[3]{7x-1}\right)^2-2\sqrt[3]{7x-1}+2^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to -1}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{7x-1}\right)^3-\ 2^3}{(x+1)\left(\sqrt[3]{(7x-1)^2}-2\sqrt[3]{7x-1}+4\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to -1}\left[\frac{7x-1+8}{(x+1)\left(\sqrt[3]{(7x-1)^2}-2\sqrt[3]{7x-1}+4\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to -1}\left[\frac{7x+7}{(x+1)\left(\sqrt[3]{(7x-1)^2}-2\sqrt[3]{7x-1}+4\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to -1}\left[\frac{7(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt[3]{(7x-1)^2}-2\sqrt[3]{7x-1}+4\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to -1}\left[\frac{7}{\sqrt[3]{(7x-1)^2}-2\sqrt[3]{7x-1}+4}\right]$$

$$= \frac{7}{\sqrt[3]{(7*(-1)-1)^2}-2\sqrt[3]{7*(-1)-1}+4} = \frac{7}{\sqrt[3]{(-8)^2}-2\sqrt[3]{-8}+4}$$

$$= \frac{7}{\sqrt[3]{64}-2(-2)+4} = \frac{7}{4+4+4} = \frac{7}{12}$$

8. $\lim_{x\to-2}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{5x^2+7}}{x+2}\right)=\frac{\sqrt{(-2)^2+5}-\sqrt[3]{5(-2)^2+7}}{(-2)+2}=\frac{\sqrt{4+5}-\sqrt[3]{20+7}}{-2+2}$

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{5x^2+7}}{x+2}\right)=\frac{\sqrt{9}-\sqrt[3]{27}}{0}=\frac{3-3}{0}=\frac{0}{0}$$

Un camino para resolver este límite, podría ser, sumar y restar 3 al numerador y luego separar la fracción, esto es:

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{5x^2+7}}{x+2}\right)=\lim_{x\to-2}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)+\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}{x+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to-2}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}\right)-\lim_{x\to-2}\left(\frac{\sqrt[3]{5x^2+7}-3}{x+2}\right)\ ;\quad ①$$

Resolvamos los límites por separado.

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}\right)=\lim_{x\to-2}\left[\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to-2}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-3^2}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}\right]=\lim_{x\to-2}\left[\frac{x^2+5-9}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-2}\left[\frac{x^2-2^2}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}\right]=\lim_{x\to-2}\left[\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-2}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)=\frac{(-2)-2}{\sqrt{(-2)^2+5}+3}=\frac{-2-2}{\sqrt{4+5}+3}=\frac{-4}{\sqrt{9}+3}$$

$$=\frac{-4}{3+3}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}\ ;\quad ②$$

Resolviendo el otro límite:

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{\sqrt[3]{5x^2+7}-3}{x+2}\right)=\lim_{x\to-2}\left[\left(\frac{\sqrt[3]{5x^2+7}-3}{x+2}\right)\left(\frac{\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)+3^2}{\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)+3^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to-2}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^3-3^3}{(x+2)\left(\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}+3\sqrt[3]{5x^2+7}+9\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-2}\left[\frac{5x^2+7-27}{(x+2)\left(\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}+3\sqrt[3]{5x^2+7}+9\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to -2}\left[\frac{5x^2-20}{(x+2)\left(\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}+3\sqrt[3]{5x^2+7}+9\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to -2}\left[\frac{5(x^2-4)}{(x+2)\left(\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}+3\sqrt[3]{5x^2+7}+9\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to -2}\left[\frac{5(x-2)(x+2)}{(x+2)\left(\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}+3\sqrt[3]{5x^2+7}+9\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to -2}\left[\frac{5(x-2)}{\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}+3\sqrt[3]{5x^2+7}+9}\right] = \frac{5\big((-2)-2\big)}{\sqrt[3]{(5(-2)^2+7)^2}+3\sqrt[3]{5(-2)^2+7}+9}$$

$$= \frac{5(-2-2)}{\sqrt[3]{27^2}+3\sqrt[3]{27}+9} = \frac{5(-4)}{\sqrt[3]{(3^3)^2}+3\sqrt[3]{3^3}+9}$$

$$= \frac{-20}{9+9+9} = \frac{-20}{27} = -\frac{20}{27}\ ; \quad ③$$

Por lo tanto, sustituyendo ② y ③ en ① nos queda:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}\right) - \lim_{x\to -2}\left(\frac{\sqrt[3]{5x^2+7}-3}{x+2}\right) = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{20}{27}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{20}{27}$$

En conclusión:

$$\boxed{\lim_{x\to -2}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{5x^2+7}}{x+2}\right) = \frac{2}{3}}$$

Limites trigonométricos

Para el cálculo de los límites trigonométricos, se requiere establecer algunos límites básicos:

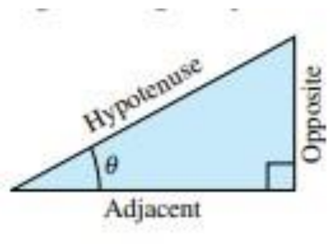
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \right) = 1; \forall a \in \mathbb{R}^*$$

Formulas trigonométricas

a. Definición de las seis funciones trigonométricas

Definiciones de triangulo rectángulo, donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

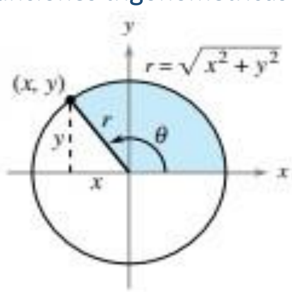


$$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \quad \csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \quad \sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \quad \cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$$

b. Definiciones de funciones trigonométricas donde $\boldsymbol{\theta}$ es cualquier ángulo



$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \csc \theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\sin x = \frac{1}{\csc x} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \quad \cos x = \frac{1}{\sec x} \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

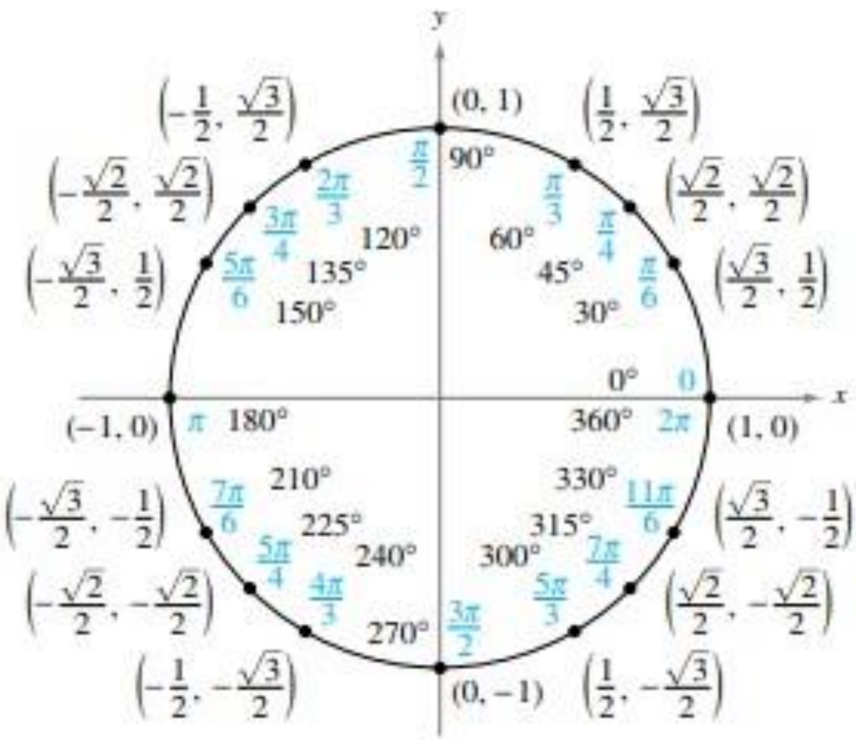
c. Identidades de cociente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad ; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

d. Identidades trigonométricas pitagóricas

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

e. Ángulos notables



f. Identidades de cofunción

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

g. Identidades pares / impares

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x$$
$$\csc(-x) = -\csc x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$
$$\sec(-x) = \sec x \qquad \cot(-x) = -\cot x$$

h. Fórmulas de suma y diferencia

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$
$$\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v}$$

i. Fórmula de ángulo doble

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$
$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$$
$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

j. Fórmula de reducción de potencia

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$
$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$
$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

k. Fórmula de suma a producto

$$\sin u + \sin v = 2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\sin u - \sin v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

l. Fórmula de producto a suma

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) + \cos(u+v)]$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) + \sin(u-v)]$$

$$\cos u \sin v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) - \sin(u-v)]$$

Ejercicios resueltos

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \frac{1-\cos 0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1^2-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x\ \sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{sin^2 x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{1+cos\ x}\right)\right]$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)^2\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1+cos\ x}\right)\right) = 1^2\left(\frac{0}{1+\cos 0}\right)$$

$$= 1\left(\frac{0}{1+1}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{x}\right) = \frac{\tan 0}{0} = \frac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3\,x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\,\tan x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\,\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{3\sin 3x}{3x}\right)\left(\frac{1}{\cos 3x}\right)\right] = 3\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\right]\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos 3x}\right)\right]$$

$$= 3(1)\left(\frac{1}{\cos 0}\right) = 3\left(\frac{1}{1}\right) = 3$$

3. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin\sqrt{x}}\right) = \frac{0}{\sin\sqrt{0}} = \frac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sin\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sqrt{x}}{\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}\right] = \frac{\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}}{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

4. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\tan x}{\sin x}\right) = \frac{0-\tan 0}{\sin 0} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\tan x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x} - \frac{\tan x}{\sin x}\right)$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right] - \left[\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\right)\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)\right] - \left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{1}\right)} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$$

5. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ \sin x}{1-\cos x}\right) = \frac{0\ \sin 0}{1-\cos 0} = \frac{0.0}{1-1} = \frac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ \sin x}{1-\cos x}\right) = \mathit{lim}_{x\to 0}\left[\left(\frac{x\ \mathit{sin}\,x}{1-\mathit{cos}\,x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x\ \mathit{sin}\,x\ (1+\mathit{cos}\,x)}{1^2-\mathit{cos}^2\,x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x\ \mathit{sin}\,x\ (1+\mathit{cos}\,x)}{\sin^2 x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 + cos\, x}{\frac{\sin x}{x}} \right] = \frac{\lim_{x \to 0}(1 + \cos x)}{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)} = \frac{1 + \cos 0}{1} = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

6. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan \theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - 1}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

Este límite se resuelve haciendo un cambio de variable, esto es:

$$\theta \to \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \begin{cases} \theta - \frac{\pi}{4} \to 0 \\ \mu = \theta - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu \to 0 \\ \theta = \mu + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan \theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}} \right) = \lim_{\mu \to 0} \left[\frac{\tan \left(\mu + \frac{\pi}{4} \right) - 1}{\mu} \right]$$

$$= \lim_{\mu \to 0} \left[\frac{\frac{\tan \mu + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \mu \ \tan \frac{\pi}{4}} - 1}{\mu} \right] = \lim_{\mu \to 0} \left[\frac{\frac{\tan \mu + 1}{1 - \tan \mu \ .1} - 1}{\mu} \right]$$

$$= \lim_{\mu \to 0} \left[\frac{\frac{tan\, \mu + 1 - (1 - tan\, \mu)}{1 - tan\, \mu}}{\mu} \right]$$

$$= \lim_{\mu \to 0} \left[\frac{tan\, \mu + 1 - 1 + tan\, \mu}{\mu\, (1 - tan\, \mu)} \right] = \lim_{\mu \to 0} \left[\frac{2 \tan \mu}{\mu \left(1 - \frac{\sin \mu}{\cos \mu} \right)} \right]$$

$$= 2 \lim_{\mu \to 0} \left[\frac{\frac{\sin \mu}{\cos \mu}}{\mu \left(\frac{\cos \mu - \sin \mu}{\cos \mu} \right)} \right] = 2 \lim_{\mu \to 0} \left[\frac{\sin \mu}{\mu (\cos \mu - \sin \mu)} \right]$$

$$= 2 \left[\lim_{\mu \to 0} \left(\frac{\sin \mu}{\mu} \right) \right] \left[\lim_{\mu \to 0} \left(\frac{1}{\cos \mu - \sin \mu} \right) \right] = 2(1) \left(\frac{1}{\cos 0 - \sin 0} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1 - 0} \right) = 2 \left(\frac{1}{1} \right) = 2$$

Ejercicios propuestos

Calcule los siguientes límites

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}\right)$

2. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}\right)$

3. $\lim_{y\to -2}\left(\frac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}\right)$

4. $\lim_{u\to 2}\left(\frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}\right)$

5. $\lim_{h\to 0}\left[\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\right]$

6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$

7. $\lim_{x\to 7}\left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right)$

8. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)$

9. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right)$

10. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}\right)$

11. $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)$

12. $\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}\right)$

13. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}\right)$

14. $\lim_{x\to 8}\left(\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\right)$

15. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$

16. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}\right)$

17. $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x+6}{x^2-16}-\frac{x+1}{x^2-4x}\right)$

18. $\lim_{\theta\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\tan\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right)$

19. $\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{2\sin^2\alpha}{\alpha^2\sec\alpha}\right)$

20. $\lim_{\rho\to \frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\rho\right)\tan\rho\right]$

21. $\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+\tan\theta}-\sqrt{1-\tan\theta}}{\tan 2\theta}\right)$

22. $\lim_{\mu \to 0} \left(\frac{1 - \cos \mu}{\mu^2} \right)$

23. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{10x - 3 \sin x}{x} \right)$

24. $\lim_{x \to 1} \left[\frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3} \right]$

25. $\lim_{x \to 2\pi} \left(\frac{x - 2\pi}{\sin x} \right)$

26. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x \sin 3x}{1 - \cos 2x} \right)$

Límites al infinito

Hasta ahora hemos estudiado límites de funciones, En ellos nos hemos preguntado qué pasa con $f(x)$ cuando "x" se aproxima a un valor determinado c. Aquí nos preguntaremos qué pasa con $f(x)$ cuando x crece ilimitadamente (x crece sin cota) o cuando decrece ilimitadamente (decrece sin cota). Estos son los límites al infinito.

Si buscamos el **significado** literal de infinito sería algo sin fin, que no tiene límites, que nunca termina, lo relacionamos con el espacio, el tiempo y con las **matemáticas**; el **matemático** John Wallis lo llamó lemniscate, mientras Bernoulli lo llamó Lemniscus que significa lazo.

El símbolo del infinito ∞ tiene la forma del número ocho acostado, es decir, en horizontal. Se asocia al infinito debido al hecho de que no se puede determinar ni el principio ni el fin del símbolo, ya que todos sus elementos están conectados.

Propiedades del límite a $+\infty$ o $-\infty$

$Propiedad\ 1\!: \lim_{x \to \infty} k = k$
$propiedad\ 2\!: \lim_{x \to \infty} x = \infty$
$propiedad\ 3\!: \lim_{x \to \infty} x^n = \infty\,;\ \forall n \in \mathbb{R}^+$
$Propiedad\ 4\!: \lim_{x \to \infty} \left(\frac{k}{x} \right) = 0$
$Propiedad\ 5\!: \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{k}{x^n} \right) = 0\,, \forall n \in \mathbb{R}^+$

Propiedad 6: Límite cuando x tiende a infinito de división de polinomios del mismo grado

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2 + 7x - 2}{5x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{7x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{5}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3 + \frac{7}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+7x-2}{5x^2-2x+1}\right)=\frac{3+0-0}{5-0+0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+7x-2}{5x^2-2x+1}\right)=\frac{3}{5}}$$

Ejercicio 2:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-4x^2+6x-1}{7x^2+2x+9}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{7x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{9}{x^3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{9}{x^3}}\right)=\frac{2-0+0-0}{0+0-0}=\frac{2}{0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-4x^2+6x-1}{7x^2+2x+9}\right)=\infty}$$

Ejercicio 3:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+x-1}{9x^2-2x+7}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{9-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}\right)=\frac{3+0-0}{9-0+0}=\frac{3}{9}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+x-1}{9x^2-2x+7}\right)=\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 4:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-x\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-x^{\frac{3}{2}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-1}\right)=\frac{0+0}{0-1}=\frac{0}{-1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-x\sqrt{x}}\right)=0}$$

Ejercicio 5:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8-\sqrt[3]{x}}{2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8-x^{\frac{1}{3}}}{2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{8}{x}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{x}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{8}{x}-\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}{\frac{2}{x}-1}\right)=\frac{0-0}{0-1}=\frac{0}{-1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8-\sqrt[3]{x}}{2+x}\right)=0}$$

Ejercicio 6:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2-x}{x^2+9}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{4-0}{1+0}}=\sqrt{\frac{4}{1}}=\sqrt{4}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2-x}{x^2+9}}=2}$$

Ejercicio 7:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+\sqrt{x^4-x^2+3x}}{x-\sqrt{x^4-1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{\sqrt{x^4-x^2+3x}}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\sqrt{\frac{x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{3x}{x^4}}}{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{x^4}{x^4}-\frac{1}{x^4}}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^3}}}{\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}\right)$$

$$= \frac{2+\sqrt{1-0+0}}{0-\sqrt{1-0}} = \frac{2+1}{0-1} = \frac{3}{-1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+\sqrt{x^4-x^2+3x}}{x-\sqrt{x^4-1}}\right) = -3}$$

Ejercicio 8:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{8x^6-3x^4+x^3-1}+\sqrt{x^2+4x^4}}{3x^2+2x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt[3]{8x^6-3x^4+x^3-1}}{x^2}+\frac{\sqrt{x^2+4x^4}}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{8x^6}{x^6}-\frac{3x^4}{x^6}+\frac{x^3}{x^6}-\frac{1}{x^6}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^4}+\frac{4x^4}{x^4}}}{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{8-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^6}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}}{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{8-0+0-0}+\sqrt{0+4}}{3+0-0} = \frac{\sqrt[3]{8}+\sqrt{4}}{3} = \frac{2+2}{3}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{8x^6-3x^4+x^3-1}+\sqrt{x^2+4x^4}}{3x^2+2x-1}\right) = \frac{4}{3}}$$

Ejercicio 9:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x}{x^4}}}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}} = \sqrt{\frac{1}{1}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \right) = 1}$$

Propiedad 7: limites $\infty - \infty$

La idea en los casos en que se tiene una diferencia de raíces es multiplicar y dividir por la suma de las raíces (lo que se suele llamar el conjugado o factor racionalizante). De este modo la indeterminación se transformará en una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left[\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) \right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} + 1} \right] = = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \right]$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{0}{\sqrt{1}+1} = \frac{0}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = 0}$$

Ejercicio 2:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+\frac{x}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+1}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\right] = \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = \frac{2}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = 1}$$

Ejercicio 3:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right) = \sqrt{\infty+\sqrt{\infty}}-\sqrt{\infty-\sqrt{\infty}} = \infty-\infty$$

Luego

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}^2-\sqrt{x-\sqrt{x}}^2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+\sqrt{x}-\left(x-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right]$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}\right]$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}}}\right]$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{x^2}}}}\right]$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right] = 2\left[\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0}}+\sqrt{1-\sqrt{0}}}\right] = 2\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right) = 1}$$

Ejercicios propuestos

Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right]$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right]$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-x\right]$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\sqrt[3]{1-x^3}\right]$

Propiedad 8: limites $\mathbf{1}^{\infty}$

Definición del número e

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e}$$

Ejercicio resuelto

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{n+2}$

<u>Solución</u>:

Primeros evaluemos el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n+2} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}}\right)\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}(n++2)} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}\right)\right]^{\infty}$$

$$= \left(\frac{2+0}{2-0}\right)^{\infty} = \left(\frac{2}{2}\right)^{0}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n+2} = 1^{\infty}}$$

La idea es valernos de la definición del número e, estos es:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

Primer paso: “fabricar” la expresión $1+\frac{1}{f(n)}$ de $\frac{2n+1}{2n-3}$

$$\frac{2n+1}{2n-3} = 1+\frac{2n+1}{2n-3}-1 = 1+\frac{2n+1-(2n-3)}{2n-3}$$

$$= 1+\frac{2n+1-2n+3}{2n-3} = 1+\frac{4}{2n-3} = 1+\frac{\frac{4}{4}}{\frac{2n-3}{4}}$$

$$\boxed{\frac{2n+1}{2n-3} = 1+\frac{1}{\left(\frac{2n-3}{4}\right)}} \;;(1)$$

En resumen, la función $f(n)$ es:

$$\boxed{f(n) = \frac{2n-3}{4}}$$

Segundo paso: la función $f(n)$ “aparezca” en el exponente

$$n+2 = \left(\frac{2n-3}{4}\right)(n+2)\left(\frac{4}{2n-3}\right)$$

$$\boxed{n+2 = \left(\frac{2n-3}{4}\right)\left[\frac{4(n+2)}{2n-3}\right]} \; ; \; (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en el límite original tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{2n-3}{4}\right)}\right]^{\left(\frac{2n-3}{4}\right)\left[\frac{4(n+2)}{2n-3}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{\left(\frac{2n-3}{4}\right)}\right]^{\frac{2n-3}{4}}\right\}^{\frac{4(n+2)}{2n-3}}$$

$$= \left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{2n-3}{4}\right)}\right]^{\frac{2n-3}{4}}\right\}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{4(n+2)}{2n-3}\right]} \qquad ; (3)$$

Evaluando los límites por separado tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{4}\right) = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}(2n-3) = \infty$$

$$\Longrightarrow \; \mathop{lim}_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{2n-3}{4}\right)}\right]^{\frac{2n-3}{4}} = e \;, por\ definición\ del\ numero\ e \; ; (4)$$

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n+2)}{2n-3}\right] = 4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}}\right) = 4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{3}{n}}\right) = 4\left(\frac{1+0}{2-0}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\mathop{lim}_{n\to\infty}\left[\frac{4(n+2)}{2n-3}\right] = 2} \; ; (5)$$

En conclusión, sustituyendo (4) y (5) en (3) tenemos que:

$$\boxed{\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{2n-3}{4}\right)}\right]^{\frac{2n-3}{4}}\right\}^{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n+2)}{2n-3}\right]} = e^{2}}$$

Este procedimiento se resume en este teorema:

Teorema

$$\boxed{\begin{array}{c} Si\ \lim_{x\to a} f(x) = 1\ y\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty\ , entonces, \\ \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{L}, donde\ L = \lim_{x\to a}[g(x)\,(f(x)-1)] \end{array}}$$

Ejercicios resueltos

Resolvamos el ejercicio anterior, aplicando el teorema:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}[f(n)]^{g(n)}$$

Evaluando los límites tanto de la base y el exponente, tenemos que:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}\right) = \frac{2+0}{2-0} = \frac{2}{2} = 1 \\ \lim_{n\to\infty}(n+2) = \infty \end{cases}$$

Evaluemos $g(n)\,[f(n)-1]$

$$g(n)\,[f(n)-1] = (n+2)\left[\frac{2n+1}{2n-3}-1\right]$$

$$= (n+2)\left[\frac{2n+1-(2n-3)}{2n-3}\right] = (n+2)\left[\frac{2n+1-2n+3}{2n-3}\right]$$

$$= (n+2)\left[\frac{4}{2n-3}\right] = 4\left(\frac{n+2}{2n-3}\right)$$

Ahora, calculemos L

$$L = \lim_{n\to\infty}[g(n)\,(f(n)-1)] = \lim_{n\to\infty}\left[4\left(\frac{n+2}{2n-3}\right)\right]$$

$$L = 4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n-3}\right) = 4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}}\right) = 4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{3}{n}}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1+0}{2-0}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\boxed{L = \lim_{n\to\infty}\left[4\left(\frac{n+2}{2n-3}\right)\right] = 2}$$

En resumen, por el teorema se concluye:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n+2} = e^2}$$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+2x}{4x^3-3x^2-2}\right)^{\frac{2x^6+1}{x^5}}$

<u>Solución</u>:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+2x}{4x^3-3x^2-2}\right)^{\frac{2x^6+1}{x^5}} = \lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)}$$

Evaluemos los límites de la base y el exponente:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+2x}{4x^3-3x^2-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+\frac{2}{x^3}}{4-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) = \frac{4+0}{4-0-0} = \frac{4}{4}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+2x}{4x^3-3x^2-2}\right) = 1}$$

Evaluando el límite del exponente tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^6+1}{x^5}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^6}{x^5}+\frac{1}{x^5}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2x+\frac{1}{x^5}\right) = \infty$$

En resumen:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+2x}{4x^3-3x^2-2}\right)^{\frac{2x^6+1}{x^5}} = 1^\infty$$

Este límite cumple la hipótesis del teorema, entonces, evaluemos la expresión:

$$g(x)[f(x)-1] = \left(\frac{2x^6+1}{x^5}\right)\left[\frac{4x^3+2x}{4x^3-3x^2-2}-1\right]$$

$$= \left(\frac{2x^6+1}{x^5}\right)\left[\frac{4x^3+2x-(4x^3-3x^2-2)}{4x^3-3x^2-2}\right]$$

$$= \left(\frac{2x^6+1}{x^5}\right)\left[\frac{4x^3+2x-4x^3+3x^2+2}{4x^3-2}\right] = \left(\frac{2x^6+1}{x^5}\right)\left(\frac{3x^2+2x+2}{4x^3-2}\right)$$

Luego, evaluemos el límite de esta expresión cuando x tiende al infinito

$$L = \lim_{x\to\infty}\{g(x)[f(x)-1]\} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2x^6+1}{x^5}\right)\left(\frac{3x^2+2x+2}{4x^3-2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{(2x^6+1)(3x^2+2x+2)}{x^8}}{\frac{x^5(4x^3-2)}{x^8}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{2x^6+1}{x^6}\right)\left(\frac{3x^2+2x+2}{x^2}\right)}{\frac{4x^3-2}{x^3}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{2x^6}{x^6}+\frac{1}{x^6}\right)\left(\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(2+\frac{1}{x^6}\right)\left(3+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{4-\frac{2}{x^3}}\right]$$

$$= \frac{(2+0)(3+0+0)}{4-0} = \frac{(2)(3)}{4} = \frac{6}{4}$$

$$L = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2x^6+1}{x^5}\right)\left(\frac{3x^2+2x+2}{4x^3-2}\right)\right] = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+2x}{4x^3-3x^2-2}\right)^{\frac{2x^6+1}{x^5}} = e^{\frac{3}{2}}}$$

3. $\lim_{x\to -2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x+2}}$

<u>Solución</u>:

Primero evaluemos el límite

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x+2}} = \left[\frac{2(-2)+1}{(-2)-1}\right]^{\frac{1}{-2+2}} = \left(\frac{-4+1}{-3}\right)^{\frac{1}{0}} = \left(\frac{-3}{-3}\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

Sean

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} \\ g(x) = \dfrac{1}{x+2} \end{cases}$$

Evaluemos la expresión L

$$L = \lim_{x\to -2}\{g(x)[f(x)-1]\} = \lim_{x\to -2}\left[\left(\frac{1}{x+2}\right)\left(\frac{2x+1}{x-1}-1\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to -2}\left[\left(\frac{1}{x+2}\right)\left(\frac{2x+1-(x-1)}{x-1}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to -2}\left[\left(\frac{1}{x+2}\right)\left(\frac{2x+1-x+1}{x-1}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to -2}\left[\left(\frac{1}{x+2}\right)\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{-2-1}$$

$$\boxed{L = -\frac{1}{3}}$$

Por el teorema concluimos que:

$$\boxed{\lim_{x\to -2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x+2}} = e^{-\frac{1}{3}}}$$

Ejercicios propuestos

Resolver los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+5x+3}{x^3-7}\right)^{\frac{1-x^3}{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{\frac{x-1}{3}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x^5-3x^2+x+1}{6x^5-3x^2-4x-7}\right)^{\frac{1-3x^2-9x^5}{2-7x}}$